

Методика наставе математике – научна дисциплина?

Mathematical Teaching Methods – Scientific Discipline?

Daniel A. Romano

International Mathematical Virtual Institute
78000 Banja Luka, 2, Mladen Stojanovic Street, B&H
e-manil: daniel.a.romano@hotmail.com

Сажетак: Прије петнаестак година ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) је објелоданио студију "What is Research in Mathematics Education, and What Are Its Results?". Тада је било формулисано пет главних питања - која су презентована као "Discussion Document" студије и кондензованог мишљења током одговарајуће конференције:

- Шта су специфични објекти разматрања о математичком образовању?
- Шта су циљеви истраживања математичког образовања?
- Која су то специфична питања или проблеми на које би требало усредсредити пажњу при истраживању математичког образовања?
- Шта би требало да су резултати истраживања математичког образовања?, и
- Које критерије би требало користити за евалуацију резултата истраживања математичког образовања?

У овом тексту понуђена су нека размисљања која претендују да буду парцијални одговори на нека горе постављена питања.

Abstract. About 15 years ago (in 1992-1993), the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) launched a study on "What is Research in Mathematics Education, and What Are Its Results?" Five main questions were formulated and presented in the "Discussion Document" of the study and thoroughly discussed in the related conference:

- What is the specific object of study in mathematics education?
- What are the aims of research in mathematics education?
- What are the specific research questions or problematique of research in mathematics education?
- What are the results of research in mathematics education?
- What criteria should be used to evaluate the results of research in mathematics education?

In this paper we give some mediation which aspire to be partial answers on some of above questions

Кључне ријечи: математичко образовање, методика математике, истраживање математичког образовања

The Mathematics Education Subject Classification (MESCI): **B10** (Educational research and planning)
Mathematical Subject Classification (2000): **97B10** (Educational research and planning)

1.

Математичко образовање, као област људске активности, може се посматрати са различитих позиција:

- као искуство подучавања математике;
- као одговарајући занат (know how),
- као теоријско знање о закономјерности таквог подучавања.

Избор једне од тих позиција одређује модел у чијим оквирима тражимо одговоре на актуална питања математичког образовања. Међутим, у конкретној наставној пракси, оно

што се подразумева под овим позицијама није потпуно раздвојено, већ се оне у много чему, преклапају, и допуњују једна другу: тамо гдје нема довољно научног знања, реално помаже интуиција и експериментисање. И обрнуто, искориштавање последњих у свакодневном раду није доказ непотребности и/или немогућности теоријских сазнања о тим аспектима математичког образовања.

У 20 вијеку, прихваћено је општељудско значење масовног математичког образовања: културни обрасци, раније прихваћени од друштвене елите, постали су доступни свим грађанима. Овај прелаз ка општем математичком образовању иницирао је прикупљање дидактичких информација о закономјерностима подучавања математике, а затим и покушаје њеног осмишљавања, тј. давања том искуству статуса научно организованог знања. Почела се формирати група знања - која су у бившем Совјетском Савезу названа 'Методика подучавања математике', у Европи - 'Дидактика математике', а у Америци - 'Теорија математичког образовања', а код нас 'Методика наставе математике'.

Крајем прошлог стољећа, покушаји давања оквира научности математичког подучавања могу се пратити кроз велики број публикованих истраживања (прецизније речено, прикупљања информација) у наведеној области људског дјеловања, те појавом ауторативних издања (као што су, на примјер: *L'Enseignement Mathématique*, *Journal for Research in Mathematics Education*, *Educational Studies in Mathematics*, *Nordisk Matematik Didaktik* и други), организовањем специјализованих конференција са тематиком из области подучавања математике, и међународних пројеката - типа *ICMI Study "Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity"*, као и професионалних асоцијација као што су „ICME“ (Међународни конгрес математичког образовања - основан 1969. године) и „CERME“ (Европска асоцијација за истраживање математичког образовања - основана 1998. године)¹.

На жалост, показује се да је теоријска проблематика знатно удаљена од праксе математичког образовања. Према информацијама које се могу чути на многим међународним конференцијама посвећеним проблемима математичког образовања, у последње вријеме (благо речено), - ово подручје је прави бал волонтаризма, гдје се примјећује снажно неуважавање раније мукотрпно прикупљених теоријских рефлексија о сопственој дјелатности. Нажалост, ову појаву межемо пратити и код нас, и у нашем окружењу: појављује се све више тзв последипломских студија из методике наставе математике, не само на математичким студијима већ (што је врло чудно и потпуно неприхватљиво), и на учитељским студијима; велики број универзитетских наставника математике себе самопроглашава експертима из методике наставе математике, а да се претходно нису ни упознали са савременим истраживањима те исте наставне праксе. Појављују се, и жалосне ситуације (као код нас на Универзитету у Бањој Луци) у којима се нематематичари (дакле, особе које не разликују елементарне математичке структуре), уз сагласност Наставно-научног вијећа Универзитета, проглашавају компетентним особама за методiku наставе математике и/или информатик, а уџбеници „из штампарије“, без икакве стручне експертизе, иду у школе; тзв. „савјете за основношколску и средњешколску математику“ формирају корумпирани и потпуно некомпетентни бирократи; учитељи, наставници и средњошколски професори остају без професионалне подршке; дидактичка испитивања се не врше; не постоји (непристрасно) национално тестирање ученика; и тако даље ... Тако се губи образовна традиција ранијег озбиљног односа према математичком образовању. Садашња „наука методике наставе математике“ своди се на окончавање некаквих последипломских и докторских студија из нечега што се назива 'методика наставе математике', а што са науком готово да нема никакве конекције. Претходна констатација базирана је на чињеници да особе које су стекле таква звања нису у стању да било које дио својих 'самосталних истраживања',

¹ Код нас, у Бањој Луци, 2003. године није успио покушај установаљавања „Центра за перманентно образовање реализатора наставе математике“ због снажног противљења старијих наставника на Одсјеку за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Бањој Луци.

обављених током последипломских и/или докторских студија, преточе у бар један чланак у неком озбиљном математичком часопису.

Горе изнесено мишљење снажно усложњава формулисање циља овог текста, чији садржај, судећи по садашњем тренду на универзитетима код нас и нашем окружењу, није потребан скоро никоме.

2.

Методика наставе математике налази се на мјесту спајања различитих наука. Она би требало да изучава и описује процесе учења и подучавања математике дјеце одређеног узраста и, зато, треба да се користи не само сопствене специфичности већ и резултате комплементарних дисциплина. Истраживани процеси се реализују у одређеним социокултурним окружењима, детерминисаним како општефилозофским погледима на образовање у цијелини (парадигме предавања социјалног искуства, установљени циљеви образовања) тако и реалним условима реализације наставног процеса (могућности друштва и школа). Ту треба прикључити још науке као што су филозофија, културологија, социологија као и теорију школског менаџмента. Томе треба додати и искориштавање метода сродних наука. При томе, још једном истичемо - методика наставе математике не треба третирати као дијелове поменутих дисциплина (као што, на примјер, искориштавање математичког апарата у физикалним анализама не чини математику дијелом физике), већ треба настојати развити специфичне теоријске моделе и алате за истраживање тих модела. Више од тога, поставке методике наставе математике не могу, нити смију бити непосредне последице било које од поменутих области, без утицаја како осталих дисциплина тако и математичких специфичности – које су објекти изучавања. Исто као што се општа дидактика не може свести на психологију тако се методика наставе математике не може свести на општу дидактику.

У циљу детерминисања научног статуса методике наставе математике, принципијелно-филозофско питање о специфичностима математичког образовања треба повезати са особеном природом математике. Ради једноставности излагања, овдје ћемо се фокусирати на традиционалне области повезане са методиком наставе математике – математичким образовањем у општеобразовној школи.

Важна назнака специфичности општег математичког образовања су оригинална усмјереност - у којој се формални циљеви образовања (васпитање и развој дјетета) појављују у истој равни са реалним (усвајањем математичких садржаја, умијећима примјењивања математичких знања у рјешавању прикладних задатака). Уопштено говорећи, математику у школи изучавају не само и не искључиво ради усвајања неопходних знања, умијећа и вјештина. Културно значење школског математичког образовања би требало би да буде не само равноправно другим циљевима образовања већ би требало да није у сукобу са културним значењем самих математичких наука.

Школску математику карактерише висока апстракција изучаваног материјала - која нема блиске аналогије ни у једном другом школском предмету. Објекти које треба усвојити кроз наставу школске математике нису у директној вези са реалношћу. Парадоксално је, али истинито, да су почетни појмови математике као што су број, скуп, релације, упоређивање, тачка, права, простор, и томе слично, у ствари, знатно апстрактнији него многи други произведени појмови у математици. Овдје треба истаћи нонсенс - који се огледа у постојању увјерења знатног броја реализатора универзитетског курса „Формирање основних математичких појмова“ - на студијској групи за васпитаче и учитељском студију - о оправданости назива тог курса. У том узрасту, дјеца немају довољно искуства са математичким објектима, нити да би се успјешно могло приступити формирању основних математичких појмова, а поготово разумијевању тих појмова унутар неких пожељних

структура. Ову тврдњу поткрепљује и чињеница да су реализатори таквих намјера - васпитачи у предшколским установама и учитељи у првом основношколском циклусу - недовољно припремљени да се упуштају у тако незахвалан посао формирања основних математичких појмова. Боље је тај посао (обавезу формирања појмова) препустити средњошколским наставницима. На тај начин би се избјегла многа неразумијевања између циљева и исхода наставе математике у основној, и у првим разредима средње школе.

При томе, то треба да је један од основних постулата математичког образовања; већина у школи изучаваних математичких модела јесте апстракција, али не нужно првог реда. Однос таквих апстракција према реалности не ријетко се причињава као природна. Чак шта више, математички материјал се понекад тврдлоглаво опире примитивној анимацији. Да ли би, на примјер, било препоручиво објашњавање правила кретања шаховског скакача-коња на плочи гледањем кретања стварних коња?

Логичка организација математичких наука снажно утиче на дубинску хијерархију изградње школских математичких дисциплина. То је једна од специфичности школске математике. Математичке структуре, изграђене у различитим школским математичким дисциплинама, повезују снажно развијене унутрашње везе. То је друга специфичност школске математике. Да би се приступило подучавању и/или учењу конкретних дијелова математичких грана, потребно је обавити дуготрајно путовање по читавом школско-математичком дрвету: није могуће усвојити диференцијални рачун без овладавања једнакосним трансформацијама алгебарских израза, посебно – без усвајања алгебарских својстава прстена разломака над прстеном реалних полинома, а ових последњих без знања о бројевима.

Конструкција других школских предмета знатно личи на шипражје у којем су различити елементи у слабој или готово никаквој међусобној вези. (На примјер: није неопходно било шта знати о клими Бразила ако је предмет интересовања географија Велике Британије).

На крају, подсјетимо - да школска математика развија код ученика многобројне пожељне карактеристике друштвено прихватљиве личности, неопходне за усвајање изучаваног материјала. Ова посебна карактеристика постаје посебно важна при упоређивању математике са другим предметима, као што су на примјер историја или географија, при чијем изучавању на нивоу школе, још увијек преовладава један облик дјелатности – памћење и способност репродукције. Примјетимо - да је математичка дјелатност високо инструментална, тј. дозвољава да се научени обрасци дјелатности веома лако примјењују посредством захтјевних задатака - при чијем рјешавању се ти обрасци реализују.

Тако се ширина наших настојања унутар реализације школских курсева 'математике', карактерише знатним бројем специфичности, које овај предмет раздвајају од других школских предмета. То нас доводи до констатације (која би требало да буде опште прихваћена) да су добијени теоријски изведени модели учења и подучавања математике (на свим нивоима образовања) примјенљиви искључиво на учење и подучавање математике, те да скоро немају додирних тачака са другим предметима. Другим ријечима, осим општепедагошких факата, тврђења и општих теорија учења и подучавања, постоје педагошка знања, вјештине и способности - неопходна за реализацију процеса подучавања и учења математике а која се не односе на друге методике наставе, као што су физика, хемија, историја, језик, итд. Постоје снажно истакнуте специфичности при подучавању и учењу веома суптилног проблема формирања математичких појмова, увиђања специфичности дефинисања тих појмова, разумијевања априорних и изведених правила (аксиома, теорема и других тврђења), формулисању математичких цјелина (теорија) и, посебно, прихватање класичних логичких принципа, те сврсисходност рјешавања (стандардних и нестандартних) математичких задатака. Посебност математике је развијање способности - како сналажења унутар већ изграђеног конзервативног система (као што су, на примјер, Аритметика и/или

Еуклидова геометрија) - кориштењем знања базираних на класичним логичким системима, тако и прихватањем спознаја да постоје и другачије логичке могућности.

Чини се да је наведено довољно аргумената да би требало признати право методици математике самостални на научни статус.

Али, шта се дешава унутар дјелатности коју у овом тренутку називамо методика наставе математике? На жалост, при читању текстова у области математичког образовања, за сада, није могуће установити оправданост њеног постојања. Њихов педагошки садржај је у вези са подучавањем и учењем било којег наставног предмета. Од три ријечи које сачињавају термин „методика наставе математике“ у тим текстовима, дају се установити садржаји који се односе само на образовање (подучавање и/или учење), а термин 'математика' појављује се само у својству ритуалног епитета наставе или средини у којој се образлаже понуђени садржај текста. То, наравно, изводи те текстове изван граница научне области у коју ју их аутори скоро безразложно утрпавају: навођење примјера из математике у илустрованоу неких дидактичких тврдњи нема много везе са методиком наставе математике: за аутора се, у том случају, само може рећи да је математички образован а не да се бави методиком наставе математике. Више од тога, мишљења сам да, у напоменутим случајевима, изложене идеје чак ни не могу бити практично реализоване. Мислим да би требало прихватити констатацију да у тим случајевима општа педагогија и психологија само улазе у школу посредством предметне методике.

Специфичност методике наставе математике би, на примјер, могла бити - разматрања која би понудила одговоре на слједећа питања:

- Шта су кључни утицаји на процесе и праксу образовања реализатора наставе математике?
- Које би захтијеве у блиској будућности требало слиједити у том образовању?
- Шта би требало да су смјернице у истраживањима образовања учитеља и предавача математике у основним и средњим школама?
- На који начин би могли, а на који начин би требало да се инволвирају резултати тих истраживања у праксу образовања наставника?

3.

У знатном броју чланака из методике наставе математике, може се уочити знатно распрострањена грешка имитирања, и/или одмицања од математичких технологија и алата. Близина огромног еталона теоријског знања, саме математике – неријетко дезоријентише почетнике, 'специјалисте' у овој области. У покушајима разрађивања питања унутар области методике наставе математике, они праве, у принципу, двије грешке: или копирају методологију и алате математике, или се снажно дистанцирају од тих методологија и алата - и улазе у воде друштвених истраживања. Блискост методике наставе математике са математиком често је разлог неоправдане убјеђености радних математичара-професионалаца о својој компетентности у методици наставе математике, па се са омаловажавањем односе према накупљеном знању добијеном нематематичким средствима. Ослањајући се на сопствено искуство вишегодишњег рада предавача, многи од њих искрено и са увјерењем, претпостављају да се педагошка рјешења преузимају на основу интуиције, искуства, традиције, установљених мишљења и 'здравог смисла'. Процјењујемо да је заузимање овакве позиције повезано са њиховим увјерењем да је методика наставе математике изграђена као област хуманистичког искуственог знања.

Хуманистички карактер методике наставе математике повезан је са стицајем прилика да је њен објект типичан хуманистички процес подучавања и усвајања сложеног математичког знања. У социуму, човјек је један од најсложенијих објеката за истраживање, а посебно интеракције између њих. Општеприхваћено је да тзв. позитивне науке (математика и друге

природне науке) немају адекватних апарата за описивање и истраживање таквих феномена као што су човјек, и његове интеракције са другим људима. Човјека и његову друштвеност није ни мало лако смјестити у неки формални систем. Међутим, у хуманистичким областима развијене су одговарајуће процедуре и процеси, а и изграђена је одговарајућа методологија, што омогућава истраживање социјалних објеката и добијање знања о њима. Хуманистички карактер методике наставе математике, јасно, сугерише прихватање категорија тих дисциплина, а и избор адекватних метода и преузимање истраживања нетипичних за саму математику.

Тако, за разлику од математике, методика наставе математике ослања се на непрецизне дефиниције и „размекшане“ појмове. Као потврда претходном мишљењу, могу послужити примјери термина: „развој“, „схватање“, „изградња“, „задатак“, „просторна имагинација“ и томе слично - за које, поуздано, не знамо шта покривају. Сусрећући се у литератури са покушајима увођења 'строгих' дефиниција за појмове те врсте, у правилу, оне изазивају врло скромне рефлексије. У хуманистичким дисциплинама, чини се уобичејенијим (а можда и не баш неприродним) увођење термина посредством неформалних описивања оног што би тај термин требало да покрије, као и навођењем довољног броја примјера унутар неких контекста, као илустрације искориштавања тих термина у везама са другим појмовима, за које се претпоставља да су нам блиски. Из таквих веза слушаца/читалаца би требало да је у могућности да - не само стекне утисак о појму који се дефинише већ и да га зна употребљавати у разним ситуацијама.

Овај приступ уопште није фундаментална слабост методике наставе математике, и треба га примјењивати потпуно свјесно. Ствар је у томе што искориштавање нестрого-детерминисаних појмова (и њихово расплинато покривање термином или групом термина) тада дозвољава баратање њима у лоше „разумљивим“ контекстима, тако типичним за хуманистичку сферу људских дјелатности. С друге стране, не може се увијек прибјећи прецизирању - јер се, у том случају, често осакаћују области могућих примјена. Овдје постоји потреба да се каже о постојању аналогних ситуација, чак и у самом математици. Најбољи примјери динамичког развоја појмова су еволуција појмова (опште) функције и вишестраног полигона у геометрији.

Природно је да тврђења, формулисана расплнутим терминима, такође буду расплнута. То снажно усложњава примјену логичких шема-доказа унутар расплнутих граница хуманистичких контекста. Правилне фигуре логичких силогизама, будући да су примјењене на расплнуте појмове и тврдње, наравно доводе до дањег „разливања“, а у многим случајевима и до искривљавања смисла. Логичка разматрања у области дидактике математике асоцирају на изградњу зида од цигала са аморфним и слабо видљивим плохама-границама тих цигала. У складу са првилима логике, настојимо изградити зид - стављајући једну циглу на другу. Међутим, у ствари, због „размекшаности“ плоха-граница конструктивних елемената те цигле, не баш ријетко, имају помјерено тежиште, што не само да представља снажну пријетњу сталног урушавања читавог зида, већ оставља утисак 'алкаво' урађеног посла. Зато, у методици наставе математике, треба - уз обавезно формализовано логичко доказивање, примјењивати и друге облике плаузабилних разматрања. Чисто дедуктивна разматрања треба обавезно допунити другим (рационално прихватљивим) разматрањима.

Сваки начин верификације хипотеза, који се користи у дидактици математике, није доказ у строго логичком смислу. У замјену за логичко (дедуктивно) закључивање, обично долази систем узрочно-послједични низ вјеродостојних закључака, који доводе до основаности хипотеза, или показују њихову непротиврјечност у односу на неке раније прихваћене факте. Разумије се, такве дедукције верификовања дају позитивне одговоре са неком (доста често – неизвјесном) вјероватноћом, наравно, мањом од јединице. Зато постаје важан методолошки

захтјев установљивања постојања лепезе доказа исказаних хипотеза, који се међусобно употпуњују, тако да се оствари повећање вјеродостојности њихове верификације.

Као важан начин верификације хипотеза, али никако и као доказ, уобичајено се користи педагошки експеримент, чији је циљ провјера постављених хипотеза или неких њених дијелова. Педагошки експеримент, како то већина аутора ради, смјешта теорију у практично поље (и тиме се задовоље - проглашавајући довољно високу вјероватноћу неке хипотезе научним резултатом), у којој би, тада, по нашем мишљењу, требало, да се накупе како позитивна тако и негативна знања, која би, даље, требало да омогуће дубље развијање теорије. У пракси високо цијењен истраживачки експеримент, који, као научни метод, у ствари, даје само потврду оправдања слутњи, ипак је органски дио истраживања. Квантитативна, али обавезно и квалитативна анализа резултата истраживачког експеримента омогућава прецизирање претходно формираних хипотеза истраживања, а у неким случајевима сугерише формулисање нових хипотеза и тврђења. Наравно, поновимо то још једном - експеримент није доказ.

При провођењу педагошког експеримента и обавезних придружених анализа, обавезно је водити рачуна о особеностима педагошког „Хајзенберговог ефекта“, аналогно познатом Хајзенберговом принципу неодређености у квантној механици: провођење експеримента мијења услове провођења процеса експериментисања, што, са своје стране, „усложњава“ добијање исхода. Сем тога, треба узети у обзир немогућност потпуног стварања једнаких услова окружења у којима се понавља експеримент: никако није могуће вратити се у натраг у вријеме, и у исте социјалне и друге услове у којима је изведен претходни експеримент.

У борби против таквих појава, прибјегава се 'рандомизацији' услова експериментисања (управљање уношењем флукуација), покушавајући тако „смањити“, што је могуће више, утицај услова експериментисања, и/или њихову измјену. У том циљу, користи се проширена лепеза експеримената (уобичајено названа „опитним утицајем“), елиминишући, што је могуће више утицај фактора експеримента.

Уз претпоставку да су експерименти изведени уредно, већина аутора евалуацију квантитативне анализе резултата експериментисања неријетко значајно прецењује. Профињена техника савремене математичке статистике, на жалост, често се неадекватно примјењује. Зато, посебно могућност нектиричког искориштавања компјутерских програма статистичке обраде података, теоријских добивених за обраду хомогених статистичких скупова - у вези са познатим законима теоријских расподела (на примјер, за обраду резултата техничких мјерења) - представља плодно подручје за „извођење“ некоректних закључака.

Ево једног примјера уобичајеног у нашој друштвеној пракси. За утврђивање ставова бирачког тијела, уз претпоставку да је узорак статистичког скупа коректно изабран, користи се теоријска нормална расподела. Помијерање локалног максимума те расподеле улијево или удесно, погрешно се тумачи као воља бирачког тијела умјесто да се тумачи као исказана фрустрација и страх од утицаја друштвеног мрачњаштва и социјалне несигурности (у случају помјерања улијево) или бјежање од плачкашких аспирација фарсичног анти-хуманизма (у случају помјерања удесно). Никада се, нажалост, не прихвата оцјена да је (друштвено) нормално оно ште је (статистички) нормално, и обрнуто.

Мишљења сам да у подучавању и/или учењу математике, статистичка хомогеност и право на примјену теоријске нормалне расподеле више представља немогућу ситуацију него правилом. Ово не значи да се треба одрицати употребе и корисности старистичких квантитативних и квалитативних обрада резултата педагошких експеримената. Мишљења сам да им треба одузети статус ваљаног начина доказивања.

Често хуманистичка пракса прибјегава тзв. 'експертизама' резултирајућих хипотеза и/или међурезултата. При томе се, понекад, примјењују формализоване процедуре селекција резултата експериментатора. Експлицитно формулисање ставова који се подвргавају експертизама, и могуће, усвајање одговарајућих критерија за процјене, по мишљењу не малог броја експериментатора, повећавају могућност позитивних исхода 'експертских' процјена и, према томе, повећавају вјероватноћу добијања исправних резултата на бази тих међурезултата. При томе, не воде рачуна да „процјене“ експертизе, снажно утичу на даље провођење експеримента, промјеном окружења, а понекад и/или циљева експериментисања. Није риједак случај да се аутори експеримента задовоље скупином парцијалних експертиза, те уопште не обављају пријекто потребно процјењивање резултата, у цијелини. Као посљедицу тога, неријетко имамо да укупни резултати експеримента буду процијењени као гранични, а да, у ствари, уопште нису такви.

Ради илустрације изнесеног мишљења, навешћу примјер потпуно специфичан за методику наставе математике: Будући да материја уоквирена у један математички предмет углавном чини цјелину, те студентско сагледавање те цјеловитости представља један од важнијих пожељних исхода наставног процеса, сматрам да треба одустати од потпуно погрешне праксе - у којој се валуација уложеног труда студената у реализацији наставног процеса процјењује квантитативном анализом парцијалних тестова, без стицања увида у студентско разумијевање цјелине.

Интересантан начин, који нема блиског аналога нити у класичној нити у савременој настави математике, јесте метода дискусије. Овдје, наравно, није ријеч о спонтаном (као што је то најчешћи случај у нашој пракси), већ о организованом и усмејреном изношењу ставова и притивставова о разматраном проблему, као елементу методологије хуманистичких знања. Чини се да историја дискусије 'почиње' Сократовим шетњама и Платоновим „Дијалогом“. Од тада, у тако дугом периоду, накупљено је велико искуство у организовању дискусија, уз повећање њихове резултантности. Истакнимо нека мјеста у примјенама таквог начина сагледавања проблема.

- (а) Свјесно укључивање дискусија у план реализације истраживачког рада, и одустајање од жеља за остваривањем високе усаглашености као циља добијања повишене ефективности рада.
- (б) Егзактно указивање на позиције, у смислу „Ја тврдим слједеће ...“ и намјере („Намјеравам оспотири слједећу тврдњу ...“), прецизности разматрања и подвргавања критички.
- (в) Анализа полазних тврдњи, и дозвољавање слабљења позиција - у циљу проналазка слабих мјеста тих истих позиција у раду.
- (г) Подстицање добронамјерне и конструктивне критике. Опонент није непријатељ, већ помоћник у истраживању. Једномишљеници не уочавају „рупе“ у властитим разматрањима и образложењима. Пренебрегавањем дискусија током реализације истраживања, они најчешће, добијају неочекивана урушавања резултата по окончању истраживања.
- (д) Анализа како позитивних тако и негативних страна а посебно консеквенци предлаганог рјешења. Како гледати на разматрање: када страна А истиче своје предности и недостатке стране Б, док, у исто вријеме, заговорници стране Б пренаглашавају предности своје, а мане супростављене стране?

Истраживач у области методике наставе математике, уопштено говорећи, преузимајући принципијелну дијалектичност хуманистичких тврђења, многа схватања преузима у пакету а која се односе на то да су многа тврђења самоочигледна, а понекад и банална (на примјер, тврђења облика „треба развити интерес ученика ка учењу математике“). Међутим, неријетко се дешава да и обрнута тврђења такође могу бити очигледна. Анализа наведеног (привидног) парадокса требало би да нас доведе до прецизирања граница примјенљивости дидктичких

тврђења. Многи претпостављају, такође да веома користан дио рада у дидактици математике јесте појавност хумора при истраживањима (или, супротно од тога, инсистирање на одсуству хумора при тим истраживањима).

Апсолутне поставке хуманистичких теорија, у правилу, исказују се у одричној форми, типа „не слиједи“, т.ј. имају карактер забране. Та традиција, чини се, зачиње још од постанка првих етичких принципа: довољно је указати, на примјер, старобиблијска заповјести. Међутим, сличан метод приступа карактеристичан је и за многе савремене научне области: присјетимо се закона о одржању енергије, иако није исказан у одричном облику. Тај закон ништа не говори о протоку физикалних процеса у затвореним системима али захтјева подударање количине енергије на почетку и на крају тих процеса, што практично значи - да забрањује процесе који не удовољавају том закону.

У хуманистичкој сфери, никад не долазимо до потпуно поузданих теорија, које претендују на покривају накупљена одговарајућа знања - рецимо у људским дјелатностима повезаним са насиљем и тоталитаризмом. Али, о једном броју важних случајева знамо довољно много тако да се може прихватити оправданим покушај формирана научних теорија о томе. Такве теорије немају увијек вањску форму - у облику забрана, иако у суштини то јесу.

Принцип негативне форме налази значајну примјену у нормативној документацији у наставним плановима и програмима, те у педагошким и дидактичким стандардима. Фактички, сви ти документи регулишу нека ограничења, типа „издвојити за математику не мање часова од наведеног броја ...“ или рецимо „остварити квалитет на часовима математике не нижи од заданих стандарда“, и томе слично.

Разумије се да се у методици наставе математике оперише не само са принципима забране него и са тврђењима позитивних токова. Одговарајућа тврђења увијек имају, мање или више, форме плаузибилних хипотеза коју су потребне у изградњи пожељних доказа.

4.

Други важан аспект методике подучавања математике састоји се у прихватању констатације да је то практична (инструментална) дисциплина, усмјерена на добијање рјешења пригодних за реализацију у наставној пракси. Пракса је истовремено исходник методичких проблема, као и мјесто гдје се провјерава теоријски моделиране хипотезе подучавања. Наставна пракса у форми истраживачког објекта и лабораторија за провођење истраживачких педагошких експеримената - јесте једно од главних инструмената истраживања наставне теорије и праксе. На крају, пракса је та која истински валоризује вриједности добивених теоријских знања.

Практични карактер методике наставе математике, прије свега, огледа се у коресподентној методологији истраживања, типичној за практичне дисциплине. Практична усмјереност школског математичког образовања реализује се посредством методологија, специфичних за ту праксу, ефективним превазилажењем парадигми које се појављују у тој пракси.

Разлику између искуствених дисциплина и теоријских прекрасно илуструје позната досјетка: „Теоретичар ради оно што може кад је потребно, а практичар ради оно што је потребно када је то могуће.“ Ова шала илуструје очигледну оријентацију методике наставе математике ка добијању практично примјенљивих резултата. Планирано подчињавање резултата истраживања пракси служи као главна основа у намјери постављања и провођења испитивања. Није риједак случај да се, у озбиљнијим радовима као што су магистарске радње и докторске дисертације, у области методике обучавања - као актуелност научних проблема тих радова, у правилу истиче покушај давања објашњења могућности улагања напора у ликвидацији недостатака и/или разрјешење раније установљених противрјечности

праксе. Тако, сама позиција „праксе ради праксе“ неријетко је карактеристика за многе теоријске радове. То наравно ствара утисак неприродности таквих истраживања.

Практично оријентисано истраживање, које кореспондира са конкретним практичним потребама, почесто мора бити урађено у неким временским роковима. Та истраживања су такође ограничена скромним теоријским развојем многих питања у дидактици и/или сродним дисциплинама. Не риједак случај је да важан ограничавајући фактор буду недовољни материјални, кадровски и/или људски реасурси. Све ово принуђује истраживача да одступи од традиционалних метода „чистих“ теоријских дисциплина, прикључујући, не својом вољом и/или намјером (а често и због изостанка дубљих анализа у припремању експеримената), емпиријски добијеним подацима - један број података и/или тумачења тих података, по интуицији.

Истраживачи неријетко, али као у правилу, стидећи се тих момената у истраживању, брижљиво их заташкавају у истраживачким извјештајима. Ово произлази од схватања истраживача у искуственим наукама да не могу, и/или немају времена чекати на теоријска рјешења свих питања са којима су се сусретали у конкретном истраживању.

Школама су потребни уџбеници и одговарајућа школско-методичка опрема. Они су потребни у тачно утврђеним роковима, и, за њихово обезбјеђење, потребна су финансијска средства, а у друштву постоји веома ограничен број људи, који по својим професионалним квалификацијама, могу учествовати у реализацији тих пројеката, и томе слично. Не треба рачунати на то, по свему судећи, да ће се принципијелно-професионални проблеми, повезани са квалитетним уџбеницима, разријешити у скорашње вријеме. Припрема уџбеника може бити практично-теоријски пројекат, наравно суфинансиран од стране Друштва, као што је то, на примјер, урађено у пројекту Европске заједнице, гдје је - у циљу сагледавања проблема наставних планова, програма и одговарајуће уџбеничке и комплементарне литературе за наставнике и ученике реализован пројекат, у трајању од девет година, уз учешће више од тридесет држава Европе, Америке и Азије. Наравно, у процесу реализације таквих пројеката обавезна је примјена научно прихватљивих метода и процедура - развијених у педагошким, дидактичким наукама, при чему се емпиријски елементи морају строго контролисати.

Потребно је, ипак, казати да постоје карактеристике прикладне свим практичним дисциплинама, укључујући том списку и практичну математику. Зар многи математички процеси, кориштени при анализама, рецимо као што су лет ракете или конструкција атомског реактора, немају потпуну теоријску заснованост (рецимо задовољавајућег доказа конвергенције силазне путање). Али то није разлог да сумњамо у поузданост таквих разматрања - јер ракете лете, а атомски реактори производе енергију. Принципијелна могућност искориштавања недоказаних тврђења, чак и у дивергентним окружењима, значи да не постоји логичка противрјечност таквих тврђења са егзистирајућом реалношћу. Дакле, иако нисмо у могућности да дедуктивно изведемо доказе неких законитости, али их можемо експериментално провјерити, не значи да њихова логичка заснованост уопште не постоји.

Аналогно претходном, и у методици наставе математике експериментална провјера (можемо рећи чак и у ширем смислу – пракса) укључена као нит у истраживање, као његов саставни дио и као контролни алат, омогућава истраживачима да на ваљано заснованим разматрањима, користећи интуицију и раније стечена искуства истраживача, долазе до ваљаних закључака.

Вишевијековно наукупљено искуство у математичком образовању оставило нам је у наслеђе многобројна правила и обрасце корисне за примјену у раду, који су корисни и при провођењу истраживања и изњедравању резултата при таквим истраживањима, па је оправдано њихово увођење у праксу. Ради илустрације, наведимо неких од њих:

(1) Разумни конзерватизам педагога огледа се у сачувању валоризоване праксе и уздржаности пред новим и непровјереним. Океан незнања (који нас окружује) о педагошким а и социјалним процесима, не дозвољава нам да, са доста вјерним рационализмом, прогнозирамо консеквенце примијењених, а раније непровјерених рјешења, чак и ако су изабрани из скупа повољних могућности. (Подсјетимо се - да су многе добре намјере довеле до Пакла!) Зато је позиција истраживача - дидактичара математике - који има обавезу да сугерише нека рјешења као пожељна у конкретној реалности, врло незахвална – јер, дешава се да његова понуђена рјешења не само да не поправе ствар већ могу начити далекосежне штете.

(2) У школским реформама, дозвољене су врло благе еволутивне промјене, а потпуно забрањене револуционарне. Школски системи су високо инерцијални. Они асоцирају на огромне морске превознике контејнера. Нагла промјена курса таквих бродова обавезно доводи у опасност како терет (ученике) тако и брод (школски систем), и саму посаду (друштеви миље). Измјена курса таквих превозника терета дозвољена је само уз строго контролисане, њежне и лагане покрете управљача. Зато, пракса истраживачима математичког образовања обавезно ултимативно намеће снажно одупирање радикалним резултатима истраживања.

(3) Сасвим је разумљива жеља истраживача конкретног истраживања да резултате до којих су дошли, укључе у општу дидактичку концепцију - јер им то омогућава упрошћавање процедура верификације њихових резултата. Сем тога, разумно је процјењивати о повишеној вјероватноћи искориштавања резултата тако неизолованих истраживања.

(4) Присутна је оријентација ка тражењу стандардних рјешења - чији појединачни резултати не зависе знатно од флукуације улазних параметара (социјалних и антропогених услова наставе математике, квалификованост наставника, као и претходна припрељеност ученика, и томе слично). Препоруке истраживача, засноване на нестандартним рјешењима, тешко, и уз знатно опирање особља, улазе у школски живор. Искуства показују да дидактичка рјешења, заснована на резултатима који омогућују добијање „профињених“ ефеката, и који имају, према томе, сразмјерно уску област примјене, у правилу се врло тешко прихватају - углавном због стандардног супростављања елитизму у нашим школама. С друге стране, пак, „груба“ рјешења лакше пролазе код оних који одлучују о њиховој примјени.

(5) Сразмјерност циљева и средства како при провођењу истраживања тако при сабирању резултата тих истраживања. Да би измјерили димензије маља не употребљава се микрометар. Постоји неприлагођеност изабраних циљева могућностима истраживачког тима, као и другим ресурсима који стоје на располагању. Уопште, прихватање политичке доктрине - да досегнути циљеви оправдавају уложена средства је врло опасно: у социјалним окружењима оно најчешће доводи до употребе неадекватних средства, као и до појављивања неодрживих рјешења. Треба се подсјетити слједеће прагматичности: „Кажи ми каквим средствима располагаеш, а ја ћу ти казати које циљеве можеш досегнути“.

(6) Искориштавање итеративних проступака при планирању и провођењу истраживања. Искуство сугерише да није увијек могуће детерминисати све активности које треба провести да би се дошло до планираних циљева, посебно при крупнијим пројектима. Често се неке активности покажу као не нарочито нужне у суштини, иако су претходно пажљиво планиране, али се то, нажалост, почесто може установити тек на крају последње етапе рада. Зато, не би требало вршити евалуацију по дијеловима. Разумије се да би, у начелу, пројекат треба покушати урадити у цијелом те добити прве „грубе“ резултате - на основу којих се, тада, стиче утисак о могућим рјешењима проблема. Затим, треба провести критичку анализу добијених резултата и наслућених рјешења, а онда покушати извршити прецизирање - итерацијама и интерполацијама, а потом екстраполације.

Закључак

Горе изложена размишљања, у великој мјери, односе се на прирему - како текстова који претеднују да добију статус научног текста из методике наставе математике тако и на израде магистарских радњи и докторских дисертација - унутар области математичке дидактике. Наравно да није понуђен одговор - у смислу: *“Ево шта истраживање математичког образовања треба да буде”,* већ промишљање: да би *„у духу разлика и подјела међу истраживачима математичког образовања, требало констатовати потребу конституисања једног броја објеката, методологија и алата овог ентитета, и исказати је у терминима теоријских сазнања, погледа на везе између теорије и праксе, а у складу са принципијелно-филозофским ставовима о математичком образовању“.* Мишљења сам да би констатација: „Истраживање математичког образовања је често - како идентификација потешкоћа у курентној пракси тако и разматрање теоријских модела - којима би били превазиђене те парадигме, а и осмишљавање практичних техника које би се могле имплементирати као побољшање праксе“ - могла да послужи као једно од зрна, у блиској будућности изграђеној грађевини научне методике наставе математике. Још се Ханс Стајнер (Hans-Georg Steiner) залагао за гледање на појаве у математичком образовању интердисциплинарно и трансдисциплинарно, те је његово настојање уродило плодом: ICME је на конференцији у Карлсрухеу (Karlsruhe) 1976, дидактици математике признао статус научне дисциплине. Као закључак овог разматрања, требало би: (1) Прихватити констатацију да постоје потребе за фундаменталним истраживањем, и (2) Распознавати специфичност математичког образовања у систему образовања - у покушају проналажења одговора на слjedeћа питања:

- Шта је математика и шта је математичко мишљење?
- Каква је улога математике у другим наукама, или у друштву - за људе у њиховом свакодневном животу, или на њиховим радним мјестима?
- Шта је то што је детерминисало развој математичких курикулума у прошлости?
- Који су услови за увођење новина у образовни систем?
- Каква су знања из математике и дидактике математике неопходна реализаторима наставе математике?
- Како математичко образовање доприноси општим циљевима осмишљавања образовања на основношколском и/или на средњошколском нивоу?
- Како се утврђују циљеви математичког образовања, а како провјерава успјешност у досезању тих циљева?

На крају слjedeће сентенце би могле бити сублимирана рефлексивна о продуктивној интеракцији математике, математичара, математичког образовања, и методике наставе математике:

- (а) Математичка професија има дугу а неријетко и часну традицију утицаја - како на опште-математичко образовање тако и на образовање реализатора наставе математике;
- (б) Наравно да треба занемарити садашњи кратки период у којем професионални математичари готово да немају утицаја - нити на образовну политику нити на праксу математичког образовања, на било којем нивоу, јер ће овај период, као друштвено ишчашена пракса, сигурно бити превазиђен;
- (в) Еминентни математичари у читавом свијету, па тако и код нас, су - током читаве историје људског рода, а посебно сада, стално бдијели над реализацијом политике математичког образовања;
- (г) Значајан број математичара, у последње вријеме, посвећује све више времена промишљањима о - како принципијелно-филозофским ставовима тако и о актуелној пракси математичког образовања забринути због очигледне неспремности популације у цијелини, а и академски и универзитетски образованих особа - да се ухвате у коштац са проблемима надолazeће научно-информатичке револуције. У тим настојањима, требало би да их Друштво снажно подржава, а не никако (каква је сада пракса код нас), да их омета.

Л и т е р а т у р а

Кориштена или консултована у припремању овог текста

- [1] Hyman Bass: *Mathematics, mathematicians, and mathematics education*; Bulletin of the AMS, **42(4)**(2005), 417-430
- [2] Nicholas Branca, Michael Maxon, Michael Mitchelmore and Paul White: *Professional Development: Mathematical Content versus Pedagogy*, Mathematics Teacher Education and Development **6**(2004), 41-51
- [3] В.А. Далингер: *Учебно-исследовательская деятельность учащихся в процессе изучения математики*; Вестник Омского государственного педагогического университета, **195**(2007)
- [4] Janne Goodell: *Learning to teach mathematics for understanding: To role of reflection*; mathematics teacher Education and development, **2**(2000), 48-60
- [5] V.Firsov. *Mathematics Education as Theoretical Knowledge*; Nordisk Matematik Didaktik, **3(4)**(2005),
- [6] Konrad Krainer : *Action Research and Mathematics Teacher Education*; Mathematics Teacher Education, **9(3)**(2006), 213-219.
- [7] Jérôme Proulx: *Mathematical Knowledge, Mathematical Culture, and Mathematics Teacher Education*; Symposium on the Ocession of the 100th Anniversary of ICMI, Roma, March 5-8, 2008, Preprint
- [8] Д.А.Романо: *О пројјени квалитета наставе математике*; МАТ-КОЛ (Бања Лука), **X(2)**(2004), 27-36
- [9] Д.А.Романо: *Шта је то математика и ко су ти математичари?* МАТ-КОЛ (Бања Лука), **XIV(2)** (2008), 35-55
- [10] В.Г. Шантаренко: *Системный подход к обучению студентов математике на основе моделирования в визуальном информационном поле как способ реализации когнитивно-визуального подхода*; Вестник Омского государственного педагогического университета, **186**(2007)
- [11] Dina Tirosh: *What is research in mathematical teacher education?* Journal of Mathematics Teacher Education, **10(3)**(2007), 141-144.
- [12] Orit Zaslavsky: *What knowledge is involved in choosing and generating useful instructional examples?* Symposium on the Ocession of the 100th Anniversary of ICMI, Roma, March 5-8, 2008, Preprint
- [13] Anne Watson: *School mathematics as a special kind of mathematics*; Symposium on the Ocession of the 100th Anniversary of ICMI, Roma, March 5-8, 2008, Preprint